# Barycentre de 2 ; 3 ; 4 points pondérés
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

## I – Notion de points pondérés

### a) Définition :

On appelle point pondéré tout couple (A ; α) formé d'un point A du plan et d'un réel α.

**b) Notation** : (A ; α) se lit « A affecté du coefficient α» ou A(α).

## II – Barycentre de 2 points pondérés

**1°) Activité** : Soient (A ; a) ; (B ; b) deux points pondérés et M un point du plan P.
Discuter suivant les valeurs de (a+b) l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

-0-

M∈ P / $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (fixons le point A)

$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}}$.

a) 1[er] cas : Si (a+b) ≠ 0 alors $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Donc M est unique dans le plan

b) 2[ème] cas : Si (a+b) = 0 alors $b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ soit b = 0 ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Donc tous les points M du plan sont solutions.

**2°) Définition :**

Etant donnés deux points pondérés (A ; a) ; (B ; b) avec a+b ≠0. On appelle barycentre desz points pondérés (A ; a) ; (B ; b) l'unique point G du plan tel que :
$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

.[G barycentre de (A ; a) ; (B ; b)] ⇔ [ $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ].

**3°) Conséquences**

Étant donnés deux point pondérés (A ; a) ; (B ; b) et k ≠ 0 un réel. Si G est barycentre de
(A ; a) ; (B ; b) alors G est barycentre de (A ; ka) ; (B ; kb).

**4°) Remarque**

Si a = 1 et b = 1 alors G barycentre de (A ; 1) ; (B ; 1) est appelé l'isobarycentre ou l'équibarycentre des points pondérés (A ; 1) ; (B ; 1).

**5°) Théorème**

Étant donnés deux points pondérés (A ; a) ; (B ; b) . Si G est barycentre des points pondérés (A ; a) ; (B ; b) alors les points A ; B ; G sont alignés.

*Démonstration*

G barycentre des points pondérés (A ; a) ; (B ; b) $\Leftrightarrow$ a$\overrightarrow{GA}$ + b$\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (fixons A)

a$\overrightarrow{GA}$ + b$\overrightarrow{GA}$+ b$\overrightarrow{AB}$ $=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ (a+b)$\overrightarrow{GA}$ + b$\overrightarrow{AB}$ $=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ (a+b)$\overrightarrow{AG}$= b$\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. D'où A ; B ; G sont alignés.

## III – Coordonnées du barycentre de 2 points pondérés

### 1°) Définition

Soient $A(x_A;y_A)$ ; $B(x_B;y_B)$ deux points du plan dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ et $G(x_G;y_G)$ barycentre de A(a) et B(b). on appelle coordonnées barycentriques (ou coordonnées du barycentre G) l'unique couple ($x_G$ ; $y_G$) tels que :

$$x_G=\frac{a\,x_A+b\,x_B}{a+b} \quad et \quad y_G=\frac{a\,y_A+b\,y_B}{a+b}.$$

**2°) Exemple** : soit les A(1 ;2) et B(–3 ;–2). Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A ; –2) et (B ; 4). $x_G=\frac{-2-12}{2}=-7$ ; $y_G=\frac{-4-8}{2}=-6$.

D'où G(–7 ; –6).

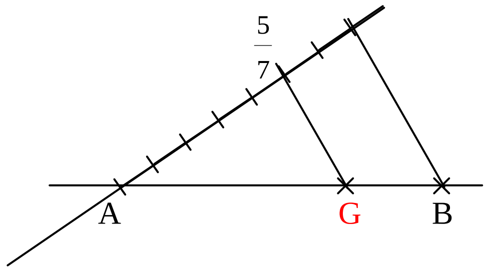
## IV – Construction du barycentre de 2 points pondérés

**Application :** construire le barycentre G des 2 points pondérés A et B dans les cas suivants

a) (A ; 2) et (B ; 5)
b) (A ; –5) et (B ; 2)
c) (A ; 2) et (B ; 4)

*Solutions*

a) G barycentre de (A ; 2) et (B ; 5)



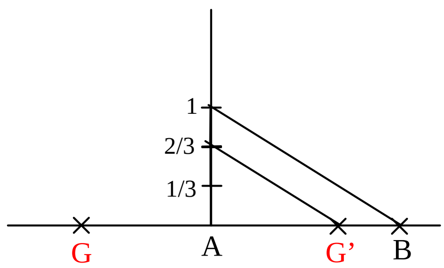

$2\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 7\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ . $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ .

b) G barycentre de (A ; –5) et (B ; 2)




$-5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ . $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .

Posons $\overrightarrow{AG'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AG'}$

## V – Barycentre de 3 points pondérés

### 1°) Propriétés

Le barycentre de plusieurs points pondérés peut se ramener de proche en proche à la recherche du barycentre de deux points pondérés.

**Exemple :**

Soient (A;$\alpha$) ; (B;$\beta$) ; (C;$\gamma$) trois points pondérés tels que : $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $\alpha+\beta \neq 0$ .

Soit $G_1$ barycentre des points pondérés (A;$\alpha$) et (B;$\beta$ ) ; on a :

$\alpha\overrightarrow{G_1A}+\beta\overrightarrow{G_1B}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$(en fixant A) $\alpha\overrightarrow{G_1A}+\beta\overrightarrow{G_1A}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{G_1A}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{AG_1}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}=\vec{0}}$. Soit G barycentre des points pondérés ($G_1$ ;$\alpha+\beta$) et (C;$\gamma$) ; on a :

$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG_1}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow$ (en fixant $G_1$) $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG_1}+\gamma\overrightarrow{GG_1}+\gamma\overrightarrow{G_1C}=\vec{0} \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GG_1}+\gamma\overrightarrow{G_1C}=\vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{G_1G}=\gamma\overrightarrow{G_1C}=\vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{G_1G}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}}$.

### 2°) Définition

Étant donnés trois points pondérés (A;$\alpha$) ; (B;$\beta$) ; (C;$\gamma$) tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

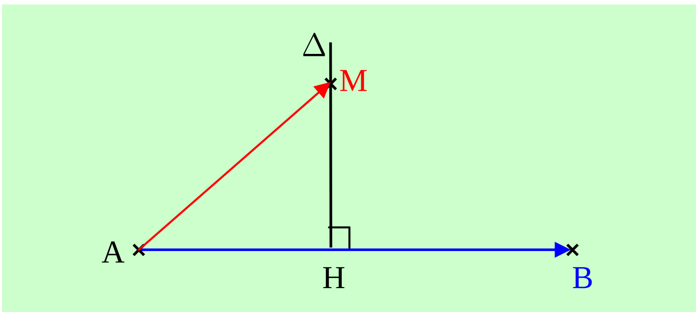
On appelle barycentre des points pondérés (A;$\alpha$) ; (B;$\beta$) ; (C;$\gamma$) l'unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ .

**3°) Exemple :** Soit ABC un triangle. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A ;1) ; (B ;2) ; (C ;–4).

## VI – Ligne de niveau de l'application M $\mapsto$ $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM}=k$ $(k\in\mathbb{R})$

Déterminons dans le plan P l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM}=k$ .

Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (AB).




On sait que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM}=\overline{AH}\times\overline{AB}$. Étant donné un réel k, on a $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM}=k \Leftrightarrow$

$\overline{AH}\times\overline{AB}=k \Leftrightarrow \overline{AH}=\dfrac{k}{\overline{AB}}$. Ainsi M vérifie $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AM}=k$ si et seulement si son projeté orthogonal sur (AB) est le point H déterminé par $\overline{AH}=\dfrac{k}{\overline{AB}}$.

*L'ensemble des points M cherché est la droite ($\Delta$) perpendiculaire à (AB) au point H tel que :* $\boxed{\overline{AH}=\dfrac{k}{\overline{AB}}}$

**Application :** soit deux points A et B tels que AB = 2 et l'application

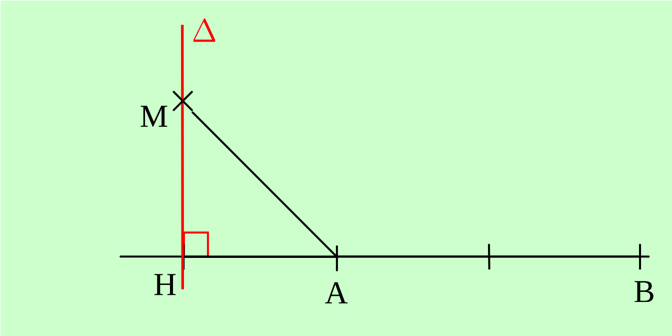
$$f : P \to P$$
$$M \mapsto \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM}$$

a) Construire les lignes de niveau –1 ; 0 de $f$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = 2$.

*Solution a)*

- K = – 1




K = –1 ; $f(M) = -1 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = \overline{AH} \times \overline{AB} \Leftrightarrow$

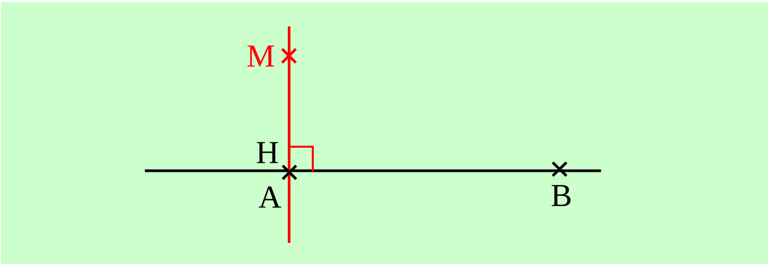
$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow$

$\overline{AH} \times \overline{AB} = -1 \Leftrightarrow \overline{AH} = \dfrac{-1}{2}$.

*L'ensemble des points M cherchés est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par le point H tel que :* $\overline{AH} = \dfrac{-1}{2}$

- K = 0

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \times \overline{AH} = 0 \Leftrightarrow 2\overline{AH} = 0$ ; les points A et H sont confondus.

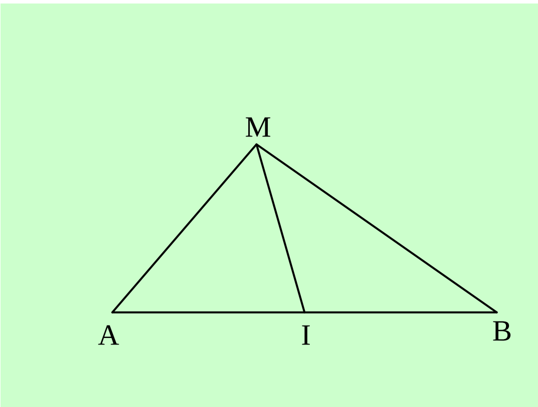



*L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.*

**VII – Ligne de niveau de l'application M ↦ $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$**

Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Soit I le milieu de [AB]. $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k \Leftrightarrow$




$$\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 = k \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = k$$

comme $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = k$ comme IA = IB

$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow$$

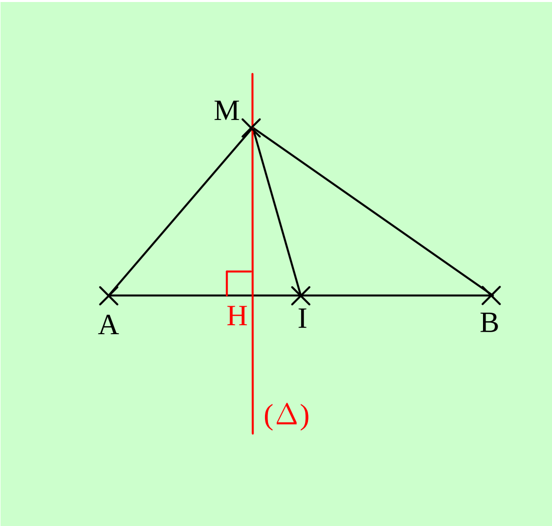
$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 = k - \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{MI}^2 = \frac{2k - AB^2}{4}}.$$

- 1er cas : Si $2k - AB^2 < 0$ , alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le vide, (E) =$\varnothing$.
- 2ème cas : Si $2k - AB^2 = 0$ , alors l'ensemble (E) des points M cherchés est {I}. (E) = {I}.
- 3ème cas : Si $2k - AB^2 > 0$ , alors $MI = \sqrt{\dfrac{2k - AB^2}{4}}$ . L'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre I et de rayon $r = \sqrt{\dfrac{2k - AB^2}{4}}$ .

## VIII – Ligne de niveau de l'application M $\mapsto \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$.
Soit I milieu de [AB], M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB).




$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4\,\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{IA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4\,\overline{IH} \times \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\,\overline{IH} \times \overline{AB}}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k \Leftrightarrow 2\,\overline{IH} \times \overline{AB} = k \Leftrightarrow \boxed{\overline{IH} = \frac{k}{2\,\overline{AB}}}$$

*L'ensemble des points M cherchés est la droite ($\Delta$ ) perpendiculaire à (AB) au point H tel que :* $\boxed{\overline{IH} = \dfrac{k}{2\,\overline{AB}}}$ .